CHUTE D'UN BALLON DE BAUDRUCHE AVEC FROTTEMENTS

Exemple de modélisation d'une situation physique: la chute d'un ballon de baudruche (ballon en caoutchouc gonflé avec de l'air qu'on laisse tomber dans l'air).

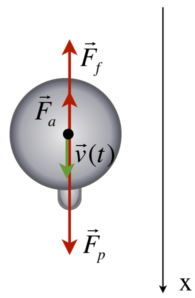
Expérimentalement:

Enregistrement du mouvement de chute du ballon avec un capteur de position à ultrasons donnant la position et la vitesse du corps en fonction du temps. On observe que la vitesse augmente rapidement, puis tend vers une valeur constante la vitesse limite de chute.

Analyse théorique du mouvement:

Mouvement rectiligne vertical d'un ballon qui se déplace sous l'action de trois forces, la force poids, la force d'Archimède et la force de frottement aérodynamique, correspondant soit à un régime d'écoulement laminaire ou turbulent:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_p + \vec{F}_a + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$$



Modélisation de la vitesse du ballon $v_x(t)$ au cours du temps:

1.- Chute avec seulement la force poids prise en compte:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_p = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a} \quad \text{c'est un MRUA}$$

$$\textit{Composante suivant l'axe } x: \quad a_x = g = cte \rightarrow v_x(t) = g \cdot t$$

La fonction $v_x(t)$ est une droite affine.

2.- Chute avec en plus la force d'Archimède:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_p + \vec{F}_a == m \cdot \vec{a} \quad \text{c'est un MRUA}$$

$$\textit{Composante suivant l'axe } x: \quad m \cdot g - \rho_{air} \cdot g \cdot V_{ballon} = m \cdot a_x$$

$$a_x = \frac{m \cdot g - \rho_{air} \cdot g \cdot V_{ballon}}{m} \rightarrow v_x(t) = a_x \cdot t$$

La fonction $v_x(t)$ est aussi une droite affine avec une pente plus faible.

3.- Avec en plus le frottement laminaire de l'air:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_p + \vec{F}_a + \vec{F}_f == m \cdot \vec{a} \ = m \cdot \vec{v}\,'(t)$$

$$\textit{Composante suivant l'axe } x: \quad m \cdot g - \rho_{air} \cdot g \cdot V_{ballon} - 6\pi R \cdot \eta \cdot v_x(t) = m \cdot v_x'(t)$$

$$\frac{m \cdot g - \rho_{air} \cdot g \cdot V_{ballon}}{m} - \frac{6\pi R \cdot \eta}{m} \cdot v_x(t) = v_x'(t)$$

En posant :

$$C_1 = \frac{m \cdot g - \rho_{air} \cdot g \cdot V_{ballon}}{m} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{6\pi R \cdot \eta}{m}$$

Cela donne une équation différentielle où la fonction $v_x(t)$ est l'inconnue :

$$C_1 - C_2 \cdot v_x(t) = v_x'(t)$$

La solution de cette équation est :

$$v_x(t) = v_{\lim}(1 - e^{-C_2 \cdot t}) \quad \textit{avec} \quad v_{\lim} = \frac{C_1}{C_2}$$

4.- Même chose avec l'écoulement turbulent, la formule change et il n'y pas de solution analytique pour cette équation. On peut alors appliquer une méthode numérique de résolution (méthode d'Euler) en prenant un pas d'itération petit.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_p + \vec{F}_a + \vec{F}_f == m \cdot \vec{a} \ = m \cdot \vec{v}\,'(t)$$

$$\textit{Composante suivant l'axe x}: \ m \cdot g - \rho_{air} \cdot g \cdot V_{ballon} - \frac{1}{2} \cdot \rho_{air} \cdot S \cdot C_{x} \cdot v_x^2(t) = m \cdot v_x'(t)$$

$$\frac{m \cdot g - \rho_{air} \cdot g \cdot V_{ballon}}{m} - \frac{1}{2m} \cdot \rho_{air} \cdot S \cdot C_{x} \cdot v_x^2(t) = v_x'(t)$$

En posant :

$$C_1 = \frac{m \cdot g - \rho_{air} \cdot g \cdot V_{ballon}}{m} \ \text{ et } \ C'_2 = \frac{\rho_{air} \cdot S \cdot C_{x}}{2m}$$

Cela donne une équation différentielle où la fonction $v_x(t)$ est l'inconnue :

$$C_1 - C_2' \cdot v_x^2(t) = v_x'(t)$$

La méthode d'Euler consiste à écrire l'accélération:

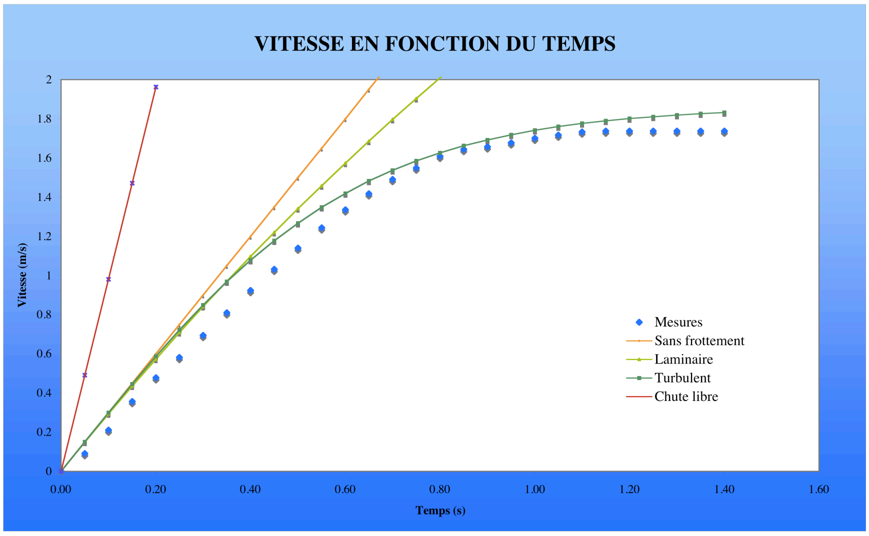
$$a_x(t) = v_x(t) = \frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

en considérant des delta très petits. Ainsi on peut calculer par itération, c'est à dire pas par pas, la fonction $v_x(t)$.

$$C_1 - C_2' \cdot v_x^2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta v = (C_1 - C_2' \cdot v_x^2) \cdot \Delta t$$

$$v_{xn+1} = v_{xn} + (C_1 - C_2' \cdot v_{xn}^2) \cdot \Delta t$$

Voici pour terminer les courbes correspondant aux différents modèles:



En annexe le tableau des mesures

FIN

CHUTE D'UN BALLON DE BAUDRUCHE AVEC FROTTEMENTS

	Mesures		Modèles			
Temps s	Position m	Vitesse m/s	V chute libre m/s	V avec Fa m/s	V laminaire m/s	V turbulent m/s
0.00	0.468	0	0	0.000	0	0
0.05	0.47	0.091	0.49	0.150	0.148	0.150
0.10	0.476	0.211	0.98	0.300	0.293	0.299
0.15	0.49	0.356	1.47	0.450	0.435	0.445
0.20	0.512	0.477	1.96	0.600	0.573	0.587
0.25	0.538	0.582	2.45	0.750	0.709	0.722
0.30	0.57	0.694	2.94	0.900	0.841	0.849
0.35	0.608	0.809	3.43	1.050	0.970	0.968
0.40	0.651	0.923	3.92	1.200	1.096	1.077
0.45	0.7	1.032	4.41	1.350	1.220	1.177
0.50	0.754	1.139	4.91	1.500	1.341	1.267
0.55	0.814	1.243	5.40	1.650	1.459	1.348
0.60	0.879	1.335	5.89	1.800	1.574	1.419
0.65	0.948	1.417	6.38	1.950	1.687	1.482
0.70	1.021	1.49	6.87	2.100	1.797	1.537
0.75	1.097	1.549	7.36	2.250	1.904	1.585
0.80	1.176	1.608	7.85	2.400	2.009	1.626
0.85	1.258	1.644	8.34	2.550	2.112	1.662
0.90	1.34	1.656	8.83	2.700	2.213	1.692
0.95	1.424	1.677	9.32	2.850	2.311	1.719
1.00	1.508	1.7	9.81	3.000	2.407	1.741
1.05	1.594	1.717	10.30	3.150	2.501	1.760
1.10	1.68	1.733	10.79	3.300	2.592	1.776
1.15	1.767	1.737	11.28	3.450	2.682	1.789
1.20	1.855	1.737	11.77	3.600	2.769	1.801
1.25	1.935	1.737	12.26	3.750	2.855	1.811
1.30	2.02	1.737	12.75	3.900	2.939	1.819
1.35	2.106	1.737	13.24	4.050	3.020	1.826
1.40	2.187	1.737	13.73	4.200	3.100	1.832
masse [kg]	vlim [m/s]					
0.020	1.73					
rayon [m]						
0.0135						

Mesures brutes chute d'un ballon 26.11.16
diamètre 27 cm, T = 22°, mb =6 g, mtot = 20 g , p = 973.5 mb